	Devoir de contrôle n°2 4 M	Durée :2H

EXERCICE

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que AB = AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Soit I , J et K les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB]. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose f = R o T et g = T o R.

1/ a) Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.
   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2/ a) Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.
   b) Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.
   c) Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g. Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

3/ a) Caractériser $S_{(JK)} \circ S_{(IC)}$.
   b) En décomposant convenablement R , montrer que $S_{(AB)} \circ R = t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IC)}$.
   c) En remarquant que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}$, préciser la nature et les éléments caractéristiques de $h = S_{(AB)} \circ R$
   d) On pose $\varphi = R \circ S_{(AC)}$.
   Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par φ et M' l'image de M_1 par φ. Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CB}$

PROBLEME

A) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \text{Log}(x+2) - \text{Log}(x) + \frac{1}{4} - \frac{2}{x+2}$.

1/ Etudier les variations de g . En déduire que $\forall\ x > 0$; $g(x) > 0$.

2/ Montrer que pour $x \in [2,3]$ on a : $g(x) < \frac{1}{2}$.

B) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x\,\text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1/ Montrer que f est continue en 0 et étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2/ Etudier les variations de f.

3/ Montrer que $\Delta : y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
Construire $\mathscr{C}_f$.

4/ Soit $h(x) = f(x) - x$; $x \in I = [2,3]$.
   a – Montrer que pour $x \in I$, $h'(x) < 0$.
   b – Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans I une solution unique x_0 telle que : $2,6 < x_0 < 2,7$.

5/ Montrer que $\forall\ x \in I\ ,\ 0 < f\,'(x) < \frac{1}{2}$.

C) On définie la suite u par : $u_0 = 2$ et pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ Montrer que pour tout n , $u_n \in I$.

2/ Montrer que pour tout n , $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$.

3/ En déduire que u converge vers x_0.